CGANT JMA
http://www.jcgantunej.or.id
Volume 2, No 2, 2021
DOI:
10.25037/cgantjma.v2i2.65

Journal of
MATHEMATICS AND APPLICATIONS

e-ISSN 2722-7774

Analisa Himpunan Dominasi Lokasi pada Model Topologi Graf Khusus dan Operasinya

Reyka Bella Desvandai[1,2], Ika Hesti A.[1,2], Kusbudiono[1,2]
[1]CGANT - Universitas Jember
[2]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember
reykyu.612@gmail.com, Hestyarin@gmail.com

Abstrak

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf sederhana tidak berarah dan terhubung dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E. Himpunan $D \in V(G)$ dikatakan himpunan dominasi lokasi dari suatu graf terhubung G jika setiap dua titik yang berbeda $u, v \in V(G)\ D$, $N(u) \cap D \neq N(v) \cap D$. Kardinalitas minimal dari himpunan dominasi lokasi disebut nilai himpunan dominasi lokasi dari graf G yang disimbolkan dengan $\gamma_L(G)$. Penelitian ini menghasilkan nilai himpunan dominasi lokasi pada beberapa graf khusus dan operasinya.

Kata Kunci : *himpunan dominasi lokasi, nilai himpunan dominasi lokasi*

Pendahuluan

Teori graf merupakan cabang matematika diskrit yang berkembang sangat pesat baik dalam pengembangan teori maupun aplikasi di berbagai bidang. Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ adalah suatu himpunan berhingga tak kosong dari elemen yang disebut dengan titik (vertex), sedangkan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan tak terurut dua titik $u, v \in V(G)$ yang disebut sisi (edge) [9]. *Order* adalah banyaknya titik dalam suatu graf G, dinotasikan dengan p atau $|V(G)|$, sedangkan size adalah banyaknya sisi pada graf G, dan dinotasikan dengan q atau $|E(G)|$.

Dua buah titik v_1, v_2 dari graf G adalah bertetangga (*adjacent*) jika v_1, v_2 terhubung langsung dengan sebuah garis atau sisi yaitu pada sisi e ditulis dengan $e = v_1v_2$. Jika $e = v_1v_2$ adalah sebuah sisi dari graf G, maka e dikatakan bersisian atau *incident* dengan titik v_1 dan v_2. Untuk sembarang sisi $e = (v_1, v_2)$ dikatakan e bersisian dengan titik v_1 jika v_1 merupakan titik ujung dari e atau e bersisian dengan titik v_2, jika v_2 merupakan titik ujung dari e.

Derajat (*degree*) dari sebuah titik v adalah banyaknya sisi yang bersisian atau *incident* dengan v. Derajat dari titik pada graf dinotasikan dengan d_i, dimana i menunjukkan titik ke-i pada graf. Jika setiap titik dari graf tersebut mempunyai derajat yang sama maka graf G dikatakan regular, jika sebaliknya maka dikatakan non-reguler. Banyaknya sisi minimal yang bersisian pada suatu titik v di graf G diantara titik-titik lainnya di graf G disebut derajat terkecil dinotasikan dengan $d(G)$. Sedangkan banyaknya maksimal sisi yang bersisian pada suatu titik di graf G disebut derajat terbesar, dinotasikan dengan $\Delta(G)$ [8].

Jarak atau *distance* dinotasikan $d(v_i, v_j)$ yang artinya jarak antara dua titik v_i dan v_j. Jarak pada graf G adalah panjang lintasan terpendek dari titik v_i ke titik v_j. Jika tidak ada lintasan dari titik v_i ke v_j, maka didefinisikan jarak $d(v_i, v_j) = \infty$.

Salah satu teori yang dikembangkan dalam teori graf adalah himpunan dominasi lokasi atau dalam istilah asing disebut *locating dominating set*. Himpunan dominasi lokasi dimulai pada tahun 1980 oleh Slater dengan membuat sebuah kode lokasi perlindungan dengan menggunakan jaringan detektor. Suatu graf $G = (V, E)$ disebut himpunan dominasi lokasi jika himpunan titik dominator D memenuhi syarat $N(u) \cap D \neq N(v) \cap D \neq \emptyset$ untuk $u, v \in (V - D)$ [10].

Berikut beberapa definisi operasi graf yang dipakai dalam penelitan ini.

Definisi 1 *Shackle dinotasikan dengan Shack (G_i,v,r). Misalkan { G_i } merupakan graf yang dibangun dari graf terhubung nontrivial dan order graf (G_1, G_2, ..., G_k) sedemikian hingga untuk setiap $1 \leq i, j \leq k$ dengan $\mid i - j \mid \geq 2$, G_i dan G_j tidak memiliki titik umum, dan untuk setiap $1 \leq i \geq k-1$, G_i dan $G_i + 1$ tepat satu titik yang sama, disebut vertex linkage dimana $k - 1$ linkage titik semua berbeda [7].*

Definisi 2 *Power graf adalah sebuah graf operasi dari dua graf yaitu graf G dan graf H yang dibentuk dari graf G dengan mengganti semua sisi dari graf G dengan graf H, dinotasikan dengan G^H. Misal graf G dengan titik $|V(G)| = p_1$ dan sisi $|E(G)| = q_1$, serta graf H dengan titik $|V(G)| = p_2$ dan sisi $|E(G)| = q_2$. Maka power graf G^H mempunyai titik $p = |V(G)| = p_2q_1 + p_1$ dan sisi $p = |E(G)| = q_1(q_2 + 1)$.*

Definisi 3 *Amalgamasi dinotasikan dengan $Amal(H_i, v_{0i})$. Misalkan H_i adalah suatu keluarga graf berhingga dan setiap H_1 mempunyai suatu titik v_{0i} yang* *disebut titik terminal [5].*

Terdapat beberapa hasil penelitian himpunan dominasi lokasi sebelumnya, seperti Chen pada salah satu artikelnya yaitu *Identifying codes and locating dominating sets on paths and cycles* [2]. Canoy et.al pada salah satu artikelnya yaitu *locating dominating set* pada *corona dan composition graph*, [1]. Foucaud pada salah satu artikelnya yaitu *Locating dominating set in twin free graph* [6]. Pada penelitian ini, penulis akan mengangkat masalah bagaimana menemukan himpunan dominasi lokasi pada beberapa graf khusus dan operasinya.

Teorema yang digunakan untuk batas bawah dari himpunan dominasi lokasi adalah sebagai berikut :

Teorema 1 *Untuk sebarang graf G, maka* $\gamma_L(G) \geq \lfloor \frac{p}{1+\delta(G)} \rfloor$.

Bukti: Misalkan S adalah sebuah *locating dominating set* dari G. Untuk batas bawahnya, setiap titik dapat sebagai *locating dominating set* dan mempunyai $\delta(G)$ ke titik yang lain. Berakibat, $\gamma_L(G) \geq \lfloor \frac{p}{1+\delta(G)} \rfloor$.

Hasil Penelitian

Dari hasil penelitian ini didapatkan beberapa teorema terkait himpunan dominasi lokasi pada beberapa graf khusus dan operasinya.

Teorema yang pertama adalah nilai himpunan dominasi lokasi dari graf G=H_n dengan operasi *shackle* yang disajikan dalam teorema berikut.

◊ **Teorema 2.1** *Misal G adalah graf hasil operasi shackle dari graf helm H_n, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, maka* γ_L $(shack(H_n, v, m)) = n \times m$.

Bukti. Graf $shack(H_n, v, m)$ adalah graf terhubung yang memiliki himpunan titik $V(shack(H_n, v, m)) = \{A_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_n\}$ dan himpunan sisinya $E(shack(H_n, v, m)) = \{A_j\ x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j}\ x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{1,j}\ x_{n,j}; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j}\ y_{i,j}; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{n,j}\ y_{1,j}; 1 \leq j \leq m\}$, sehingga memiliki order $|V(shack(H_n, v, m))| = 2mn + 1$, size $|E(shack(H_n, v, m))| = 3mn$ dan $\delta(shack(H_n, v, m)) = 1$.

Berdasarkan Teorema 1, $\gamma_L \geq \lfloor \frac{p}{1+\delta(G)} \rfloor$ sehingga $\gamma_L(shack(H_n, v, m)) \geq \lfloor \frac{2mn+1}{1+1} \rfloor = \lfloor \frac{2mn+1}{2} \rfloor = n \times m$. Akan dibuktikan $\gamma_L(shack(H_n, v, m)) \leq n \times m$

dengan memilih himpunan titik dominator dari graf $shack(H_n, v, m)$ yaitu $D = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$, maka $|D| = n \times m$. Titik $x \in D$ mendominasi semua titik dalam $V(shack(H_n, v, r))$. Kemudian $(V - D) = \{A_j, y_{3,3}, y_{i,j}; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m\}$ akan ditunjukkan semua $x, y \in (V - D)$ memiliki irisan yang berbeda dengan D, sebagaimana berikut :
$N(A_j) \cap D = \{ \bigcup (x_{i,j}); 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$
$N(y_n) \cap D = \{x_n\}$
$N(y_{1,1}) \cap D = \{x_{1,1}\}$
$N(y_{1,j+1}) \cap D = \{x_{n,j}, x_{1,j+1}; 1 \leq j \leq m-1\}$.
Sehingga berakibat $\gamma_L \leq n \times m$. Oleh karena $\gamma_L \geq n \times m$ dan $\gamma_L \leq n \times m$, maka $\gamma_L(shack(H_n, v, m)) = n \times m$. $\square$

Sebagai ilustrasi lihat Figure 1 dimana titik yang berwarna putih merupakan titik himpunan dominasi lokasi.

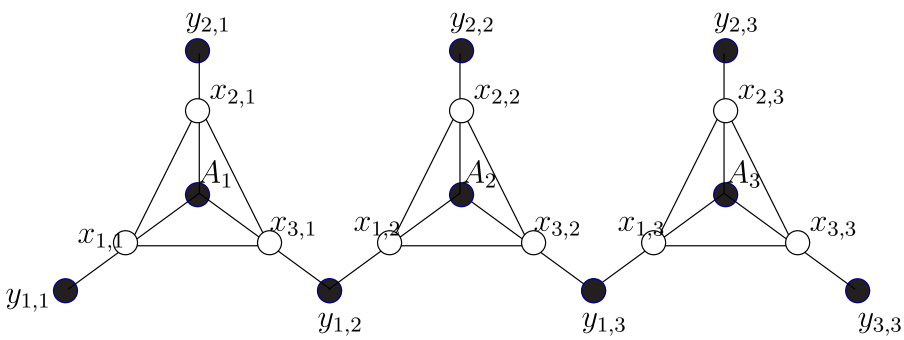

Figure 1: Himpunan Dominasi Lokasi Graf $shack(H_n, v, m)$

Teorema yang kedua adalah nilai himpunan dominasi lokasi dari graf $P_n^{H_m}$ yang disajikan dalam teorema berikut.

$\Diamond$ **Teorema 2.2** *Misal G adalah graf hasil operasi power graf dari graf lintasan P_n dan graf helm H_m, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, maka γ_L $(P_n^{H_m}) = m(n-1)$.*

Bukti. Graf $P_n^{H_m}$ adalah graf terhubung yang memiliki himpunan titik $V(P_n^{H_m}) = \{A_j; 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n-1\}$ $\cup$ $\{x_{i,j}; i = m, j = n\} \cup \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1\}$ dan himpunan sisinya $E(P_n^{H_m}) = \{A_j\ x_{i,j}; 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{A_j\ x_{1,j+1}; 1 \leq j \leq n-2\} \cup \{x_{i,j}\ x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{x_{i,j}\ x_{1,j+1}; i = m-1, 1 \leq j \leq n-2\} \cup \{A_j\ x_{i,j}; i = m, j = n-1\}$, $\cup$ $\{x_{i,j}\ y_{i,j}; 2 \leq i \leq m-2, 1 \leq j \leq n-1\}$, $\cup$ $\{x_{i,j}\ y_{i,j}; i,j = 1\}$, $\cup$ $\{x_{i,j}\ x_{i,j+1}; i = 1, 1 \leq j \leq n-2\}$, $\cup$ $\{x_{i,j}\ y_{i,j}; i = 1, 2 \leq j \leq n-1\}$, $\cup$ $\{x_{1,j}$

$y_{n,j-1}; 2 \leq j \leq n-1\}$, $\cup$ $\{x_{i,j}\ y_{i,j}; i = m, j = n-1\}$, sehingga memiliki order $|V(P_n^{H_m})| = 2mn - 2m + 1$, size $|E(P_n^{H_m})| = 3mn$ dan $\delta(P_n^{H_m}) = 1$.

Berdasarkan Teorema 1, $\gamma_L \geq \lfloor \frac{p}{1+\delta(G)} \rfloor$ sehingga $\gamma_L(P_n^{H_m}) \geq \lfloor \frac{2mn+1}{1+1} \rfloor = \lfloor \frac{2mn-2m+1}{2} \rfloor = mn - m$. Akan dibuktikan $\gamma_L \geq mn - m$ dengan memilih himpunan titik dominator dari graf $P_n^{H_m}$ yaitu $D = \{x_{i,j}, 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n-1; y_{i,j}, i = m, 1 \leq j \leq n-1\}$, maka $|D| = m(n-1)$. Titik $x \in D$ mendominasi semua titik dalam $V(P_n^{H_m})$. Kemudian $(V - D) = \{A_j, y_{i,j}; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m\}$ akan ditunjukkan semua $x, y \in (V - D)$ memiliki irisan yang berbeda dengan D, sebagaimana berikut :

$N(A_j) \cap D = \{\ (\bigcup (x_{i,j}); 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n-1), x_{i,j+1} i = 1\}$

$N(y_{i,j}) \cap D = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n-1\}$

$N(y_{i,j}) \cap D = \{x_{i,j+1}; i = m, 1 \leq j \leq n-1\}$

$N(x_{n,j}) \cap D = \{\ (\bigcup (x_{i,j}); 1 \leq i \leq m-1, j = n), y_{n,j}\}$.

Sehingga berakibat $\gamma_L \leq mn - m$. Oleh karena $\gamma_L \geq mn - m$ dan $\gamma_L \leq mn - m$, maka $\gamma_L(P_n^{H_m}) = m(n-1)$. $\square$

Sebagai ilustrasi lihat Figure 2 dimana titik yang berwarna putih merupakan titik himpunan dominasi lokasi.

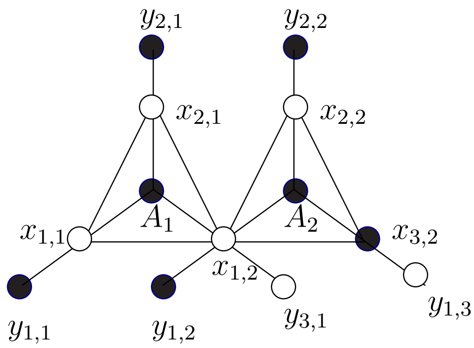

Figure 2: Himpunan Dominasi Lokasi pada Graf $P_n^{H_m}$

Teorema yang ketiga adalah nilai himpunan dominasi lokasi dari graf $G = F_n$ yang disajikan dalam teorema berikut.

$\Diamond$ **Teorema 2.3** *Misal G adalah graf khusus berupa graf kipas F_n untuk $n \geq 4$, maka nilai himpunan dominasi lokasi dari G adalah γ_L (F_n)=$\lceil \frac{2n}{5} \rceil$.*

Bukti. Graf kipas (F_n) merupakan graf terhubung dengan himpunan titik $V(F_n) = \{A, x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(F_n) = \{A\ x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i\ x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$, sehingga diperoleh $|V(F_n)| = n + 1$, dan $|E(F_n)| = 2n - 1$ dan $\delta(F_n) = 2$.

Nilai himpunan dominasi lokasi untuk $n \geq 4$ memiliki kardinalitas minimal himpunan dominasi lokasi $\gamma_L \geq \lceil \frac{2n}{5} \rceil$. Namun demikian misal $\gamma_L(F_n) \geq \lceil \frac{2n}{5} \rceil - 1$ himpunan dominasi lokasinya tidak akan terpenuhi. Hal ini dapat dilihat pada ilustrasi gambar 3. Misal untuk n terkecil yaitu $n = 4$ himpunan titik dominatornya $D = \{A\}$ sehingga $(V - D) \cap D$ diperoleh $N(x_1) \cap D = \{A\}$, $N(x_2) \cap D = \{A\}$, $N(x_3) \cap D = \{A\}$, $N(x_4) \cap D = \{A\}$. Pada titik $x \in (V - D)$ memiliki irisan D yang sama, sehingga dapat disimpulkan bahwa dengan memisalkan n terkecil tidak memenuhi syarat batas bawah dari nilai himpunan dominasi lokasi, maka n yang lebih besar pasti juga tidak memenuhi batas bawah. Oleh karena itu batas bawah yang lebih baik adalah $\gamma_L(F_n) \geq \lceil \frac{2n}{5} \rceil$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\gamma_L(F_n) \leq \lceil \frac{2n}{5} \rceil$ dengan memilih himpunan titik dominator dari graf F_n yaitu $D = \{x_{5i-3}, x_{5i-1}; 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{5} \rceil\}$ dan $|D| = \lceil \frac{2n}{5} \rceil$. Titik $x \in D$ mendominasi semua titik dalam $V(F_n)$. Kemudian $V - D = \{A, x_{5i-4}, x_{5i-2}, x_{5i}; 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{5} \rceil\}$ akan ditunjukkan semua $x \in (V - D)$ memiliki irisan yang berbeda dengan D, sebagaimana berikut :

$N(A) \cap D = \{ \bigcup (x_{5i-3}, x_{5i-1}); 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{5} \rceil\}$
$N(x_{5i-4}) \cap D = \{x_{5i-3}; 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{5} \rceil\}$
$N(x_{5i-2}) \cap D = \{x_{5i-3}, x_{5i-1}; 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{5} \rceil\}$
$N(x_{5i}) \cap D = \{x_{5i-1}; 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{5} \rceil\}$.
Sehingga $\gamma_L \leq \lceil \frac{2n}{5} \rceil$. Oleh karena $\gamma_L \geq \lceil \frac{2n}{5} \rceil$ dan $\gamma_L \leq \lceil \frac{2n}{5} \rceil$, maka $\gamma_L(F_n) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil$. □

Sebagai ilustrasi diberikan contoh himpunan dominasi lokasi pada graf dengan n terkecil yang tidak memenuhi syarat batas bawah yaitu misal $n = 4$ pada graf F_4 dapat dilihat pada gambar 3, dimana titik yang berwarna putih merupakan himpunan dominasi lokasi-nya.

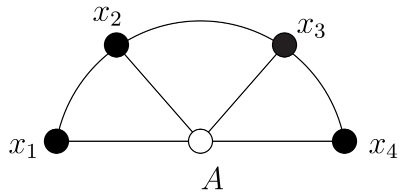

Figure 3: Himpunan Dominasi Lokasi pada graf F_4

Selanjutnya diberikan ilustrasi yang memenuhi syarat himpunan dominasi lokasi untuk $n = 7$ pada graf F_7 dapat dilihat pada gambar 4, dimana titik yang berwarna putih merupakan himpunan dominasi lokasi-nya. Dapat dilihat pada gambar 4 bahwa titik dominator pada F_7 memiliki titik dominator

$D = \{x_{5i-3}, x_{5i-1}\}$ yaitu $D = \{x_2, x_4, x_7\}$ dan titik diluar dominatornya $(V - D) = \{A, x_1, x_3, x_5, x_6\}$ memiliki irisan yang berbeda dengan D sebagai berikut $N(A) \cap D = \{x_2, x_4, x_7\}$, $N(x_1) \cap D = \{x_2\}$, $N(x_3) \cap D = \{x_2, x_4\}$, $N(x_5) \cap D = \{x_4\}$, $N(x_6) \cap D = \{x_7\}$. Berdasarkan contoh 4 terbukti bahwa $N(u, v) \cap D \neq \emptyset$ dan $N(u) \cap D \neq N(v) \cap D$ dan diperoleh $\gamma_L(F_7) = 3$.

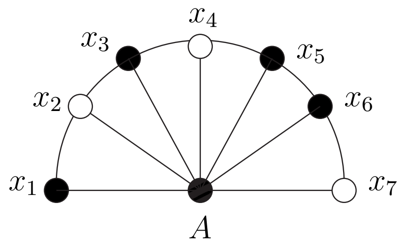

Figure 4: Himpunan Dominasi Lokasi pada Graf F_7

Teorema yang keempat adalah nilai himpunan dominasi lokasi dari graf $Amal(PC_n, v, m)$ yang disajikan dalam teorema berikut.

♢ **Teorema 2.4** *Misal G adalah graf hasil operasi amalgamasi dari graf parasut PC_n, untuk $n \geq 5$ dan $m \geq 2$, maka γ_L $(amal(PC_n, v, m)) = \lceil \frac{4n}{5} \rceil \times m$.*

Bukti. Graf $amal(PC_n, v, m)$ adalah graf terhubung yang memiliki himpunan titik $V(amal(PC_n, v, m)) = \{A, x_{i,j}, y_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisinya $E(amal(PC_n, v, m)) = \{A\ x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j}\ x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{1,j}\ y_{1,j}; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_{i,j}\ y_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{n,j}\ y_{n,j}; 1 \leq j \leq m\}$, sehingga diperoleh $|V(amal(PC_n, v, m))| = 2mn + 1$, $|E(amal(PC_n, v, m))| = 3mn$ dan $\delta(amal(PC_n, v, m)) = 2$.

Nilai himpunan dominasi lokasi untuk $n \geq 5$ dan $m \geq 2$ memiliki kardinalitas minimal himpunan dominasi lokasi $\gamma_L \geq \lceil \frac{4n}{5} \rceil \times m$. Namun demikian $\gamma_L \geq (\lceil \frac{4n}{5} \rceil \times m) - 1$ himpunan dominasi lokasinya tidak akan terpenuhi. Hal ini dapat dilihat pada ilustrasi gambar 5. Misal untuk n dan m terkecil yaitu $n = 5$ dan $m = 2$ himpunan titik dominatornya $D = \{A, x_{2,1}, y_{2,1}, y_{4,1}, x_{2,2}, y_{2,2}, y_{4,2}\}$ sehingga $(V - D) \cap D$ diperoleh $N(x_{1,1} \cap D = \{A, x_{2,1}, y_{1,1}\}$, $N(x_{3,1} \cap D = \{A, x_{2,1}\}$, $N(x_{4,1} \cap D = \{A\}$, $N(x_{5,1} \cap D = \{A\}$, $N(y_{2,1} \cap D = \{y_{1,1}\}$, $N(y_{3,1} \cap D = \{y_{4,1}\}$, $N(y_{5,1} \cap D = \{y_{4,1}\}$, $N(x_{1,2} \cap D = \{A, x_{2,2}, y_{1,2}\}$, $N(x_{3,2} \cap D = \{A, x_{2,2}\}$, $N(x_{4,2} \cap D = \{A\}$, $N(x_{5,2} \cap D = \{A\}$, $N(y_{2,2} \cap D = \{y_{1,2}\}$, $N(y_{3,2} \cap D = \{y_{4,2}\}$, $N(y_{5,2} \cap D = \{y_{4,2}\}$. Pada titik $x, y \in (V - D)$ memiliki irisan D yang sama, sehingga dapat disimpulkan bahwa dengan memisalkan n dan m terkecil tidak memenuhi syarat batas bawah dari nilai himpunan dominasi lokasi, maka n dan

m yang lebih besar pasti juga tidak memenuhi batas bawah. Oleh karena itu batas bawah yang lebih baik adalah $\gamma_L(amal(PC_n, v, m)) \geq \lceil \frac{4n}{5} \rceil \times m$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\gamma_L(amal(PC_n, v, m)) \leq \lceil \frac{4n}{5} \rceil \times m$ dengan memilih himpunan titik dominator dari $amal(PC_n, v, m)$ yaitu $D = \{x_{5i-4,j}, x_{5i-1,j},$
$y_{5i-3,j}, y_{5i,j}; 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{5} \rceil, 1 \leq j \leq m\}$, maka $|D| = \lceil \frac{4n}{5} \rceil \times m$. Titik $x, y \in D$ mendominasi semua titik dalam $V(amal(PC_n, v, r))$. Kemudian $(V - D) = \{A, x_{5i-3,j}, x_{5i-2,j}, x_{5i,j}, y_{5i-4,j}, y_{5i-2,j}, y_{5i-1,j}; 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{5} \rceil, 1 \leq j \leq m\}$ akan ditunjukkan semua $x, y \in (V - D)$ memiliki irisan yang berbeda dengan D, sebagaimana berikut :

$N(A) \cap D = \{ \bigcup (x_{5i-4,j}, x_{5i-1,j}); 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{5} \rceil, 1 \leq j \leq m\}$
$N(x_{5i-3,j}) \cap D = \{x_{5i-4,j}; 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{5} \rceil, 1 \leq j \leq m\}$
$N(x_{5i-2,j}) \cap D = \{x_{5i-1,j}\}$
$N(x_{5i,j}) \cap D = \{x_{5i-1,j}, x_{5k-4,j}; 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{5} \rceil, 2 \leq k \leq \lceil \frac{n}{5} \rceil, 1 \leq j \leq m\}$
$N(y_{5i-4,j}) \cap D = \{x_{5j-4,j}, y_{5i-3,j}; i, j = 1\}$
$N(y_{5i-2,j}) \cap D = \{y_{5i-3,j}; 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{5} \rceil, 1 \leq j \leq m\}$
$N(y_{5i-1,j}) \cap D = \{y_{5i,j}; 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{5} \rceil, 1 \leq j \leq m\}$
$N(y_{5i-4,j}) \cap D = \{y_{5i,j}, y_{5k-3,j}; 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{5} \rceil, 2 \leq k \leq \lceil \frac{n}{5} \rceil\}$.

Sehingga $\gamma_L \leq \lceil \frac{4n}{5} \rceil \times m$. Oleh karena $\gamma_L \geq \lceil \frac{4n}{5} \rceil \times m$ dan $\gamma_L \leq \lceil \frac{4n}{5} \rceil \times m$, maka $\gamma_L(amal(PC_n, v, m)) = \lceil \frac{4n}{5} \rceil \times m$. □

Berikut ilustrasi contoh pada graf dengan n dan m terkecil yang tidak memenuhi syarat batas bawah yaitu misal $n = 5$ dan $m = 2$ pada graf $amal(PC_5, v, 2)$ dapat dilihat pada gambar 5, dimana titik yang berwarna putih merupakan himpunan dominasi lokasi-nya.

Dapat dilihat pada gambar 5 bahwa titik $x, y \in (V - D)$ pada graf $amal(PC_5, v, 2)$ memiliki irisan yang sama dengan D sehingga tidak memenuhi syarat himpunan dominasi lokasi.

Sebagai ilustrasi diberikan contoh himpunan dominasi lokasi pada graf ope
rasi $amal(PC_6, v, 3)$ dapat dilihat pada Gambar 6, dimana titik yang berwarna putih merupakan himpunan dominasi lokasi-nya. Dapat dilihat pada gambar 6 bahwa titik dominator pada graf $amal(PC_6, v, 3)$ memiliki titik dominator $D = \{x_{5i-4,j}, x_{5i-1,j}, y_{5i-3,j}, y_{5i,j}; 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{5} \rceil, 1 \leq j \leq m\}$ yaitu misal ambil pada graf 1 yaitu $D = \{x_1, x_4, x_6, y_2, y_4\}$ dan titik diluar dominatornya $(V - D) = \{A, x_2, x_3, x_5, y_1, y_3, y_5\}$ memiliki tetangga yang berbeda di D

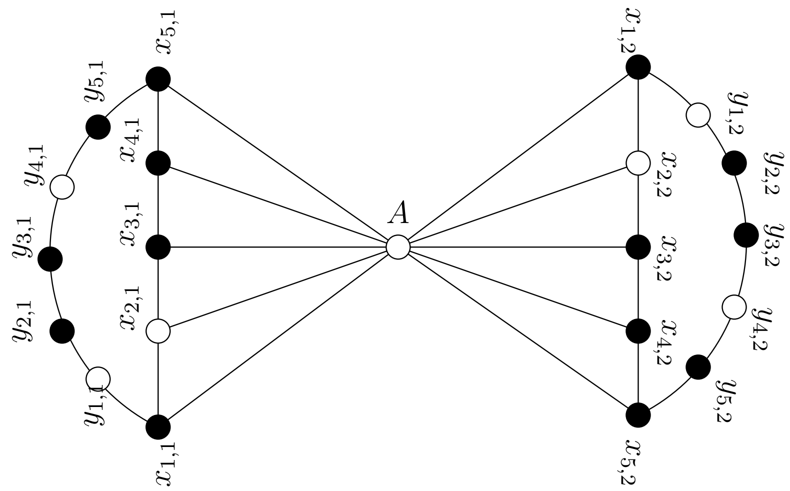

Figure 5: Himpunan Dominasi Lokasi pada Graf $Amal(PC_5, v, 2)$

yaitu $N(A) \cap D = \{x_{1,1}, x_{4,1}, x_{6,1}\}$, $N(x_2) \cap D = \{x_{1,1}\}$, $N(x_3) \cap D = \{x_4\}$, $N(x_5) \cap D = \{x_4, x_6\}$, $N(y_1) \cap D = \{x_1, y_2\}$, $N(y_3) \cap D = \{y_2, y_4\}$, $N(y_5) \cap D = \{y_4\}$, $N(y_6) \cap D = \{x_6\}$ dan seterusnya. Berdasarkan contoh 6 maka terbukti bahwa $N(u, v) \cap D \neq \emptyset$ dan $N(u) \cap D \neq N(v) \cap D$ sehingga diperoleh $\gamma_L(amal(PC_6, v, 3)) = 15$.

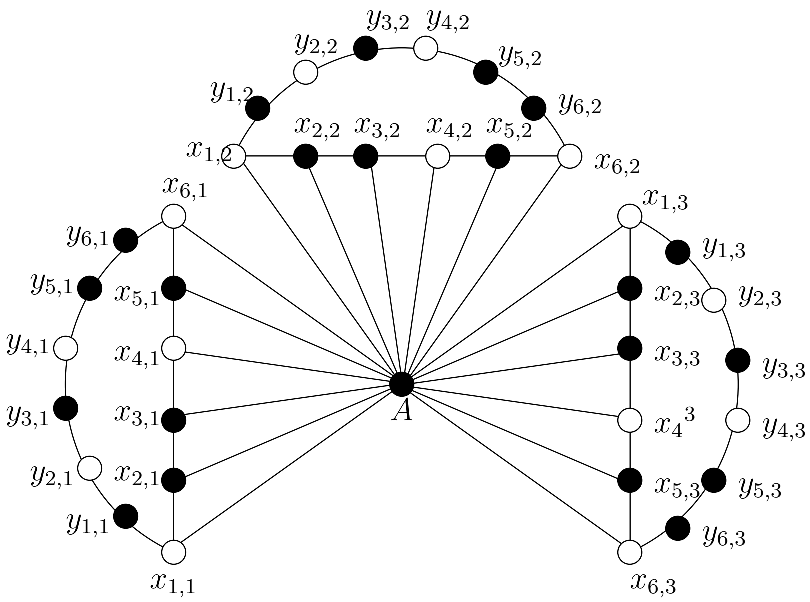

Figure 6: Himpunan Dominasi Lokasi pada Graf Hasil Operasi Amalgamasi dari PC_6

Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian diatas, maka kita dapat menyimpulkan bahwa γ_L $(shack(H_n, v, m)) = n \times m$, γ_L $(P_n^{H_m}) = m(n-1)$, γ_L (F_n)=$\lceil \frac{2n}{5} \rceil$, γ_L $(amal(PC_n, v, m)) = \lceil \frac{4n}{5} \rceil \times m$.

Open Problem 1 *Tentukan himpunan dominasi lokasi dari graf khusus lain beserta operasinya*

References

[1] Canoy, S.R., Jr., Malacas, G.A. 2014. *Locating-Dominating Sets in Graphs.* Journal of Applied Mathematical Sciences. Vol.**8** (88):4381-4388.

[2] Chen, C., Lu, C., Miao, Z. 2011. *Identifying Codes and Locating Dominating Sets on Paths and Cycles.* Jurnal:Discrete Applied Mathematics. **159**: 1540-1547.

[3] Dafik., Slamin., Tanna, D. 2016. Construction of H-antimagic graphs smaller edge-antimagic graphs. *(ars Combinatoria).*

[4] Dian N.S. Simamora, A.N.M. Salman. 2015. *The rainbow (vertex) connection number of pencil graphs.* International Conference on Graph Theory and Informating Security **74**:138-142.

[5] Figueroa-Centeno, R., Ichisima, R., and Muntaner-Batle, F. 2002. *On super edge-magic graph.* Ars Combin, **64**:81-95.

[6] Foucaud,F., Henning,M.A. 2016. *Locating-Dominating Sets in Twin-Free Graphs.* Jurnal: Discrete Applied Mathematics, **200**:52-58.

[7] Harary, F. *Graph Theory.* New London: Wesley, 2007.

[8] Hartsfield, N. dan Ringel, G. 1990. *Pearls in Graph Theory.* Boston San Diego New York London: Academic Press.

[9] Munir, R. 2009. *Matematika Diskrit Edisi 3.* Bandung: Informatika Bandung.

[10] Slater, P. J. 2002. *Fault-Tolerant Locating-Dominating Sets.* Jurnal:Discrete Mathematics. **249**:179-189.